ارائه ۱۱

پردازش اطلاعات کوانتومی

پاییز ۱۴۰۱

دکتر احمد خونساری

۱ مقدمه

در این ارائه ابتدا به یک مدار کوانتومی به نام Quantum Fourier Transform (QFT) می‌پردازیم. سپس یک کاربرد از آن را مشاهده خواهیم.

۲ QFT

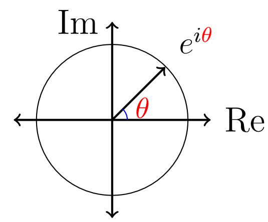
مدار QFT مشابه مدار هادامارد یک روش انتقال کیوبیت‌ها از یک پایه به پایه دیگر است که به آن «پایه فوریه» گفته می‌شود. در این تبدیل از «ریشه‌های عدد یک» به عنوان ضرایب استفاده می‌شود. به صورت خاص اگر یک سیستم n کیوبیتی داشته باشیم (در نتیجه طول بردار حالت سیستم $N = 2^n$ است)، برای محاسبه تبدیل فوریه کوانتومی یک سیستم از پاسخ‌های مختلط معادله زیر استفاده می‌شود (ریشه‌های N-ام عدد یک):

$$x^N = 1. \tag{۱}$$

برای اینکه این معادله را حل کنیم، ابتدا فرمول اویلر را در نظر بگیرید:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{۲}$$

توجه داشته باشید که $e^{i\theta}$ را می‌توان یک نقطه بر روی دایره واحد بر روی صفحه اعداد مختلط در نظر گرفت که با



شکل ۱: نمایش مقدار $e^{i\theta}$ بر روی دایره واحد

محور اعداد حقیقی زاویه θ می‌سازد. با استفاده از فرمول اخیر، می‌توان برای ریشه‌های N-ام عدد یک معادله زیر را بدست آورد:

$$0 \le \theta < 2\pi \tag{۳}$$

$$(e^{i\theta})^N = e^{iN\theta} = e^{2ik\pi} = 1, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{۴}$$

شرط اول باعث می‌شود که ریشه تکراری را در نظر نگیریم و شرط دوم ما را مطمئن می‌کند که حاصل برابر عدد یک می‌شود (یک ضریب صحیح از 2π در توان قرار می‌گیرد). به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که جواب زیر بدست می‌آید که N جواب متفاوت را مشخص می‌کند:

$$e^{\frac{2ik\pi}{N}}, \qquad \text{for } 0 \le k < N. \tag{۵}$$

برای سادگی قرار می‌دهیم $\omega = e^{2i\pi/N}$ و به این ترتیب بقیه ریشه‌ها را می‌توان به صورت ω^k نمایش داد. توجه داشته باشید که ω یک نقطه بر روی دایره واحد است که با محور اعداد حقیقی زاویه $2\pi/N$ می‌سازد و ریشه‌های بعدی نیز با فاصله‌های مساوی از یکدیگر بر روی دایره واحد قرار می‌گیرند.

۱.۲ تعریف QFT

حال که با ریشه عدد یک آشنا شدیم، تبدیل فوریه کوانتومی را تعریف می‌کنیم که از این ریشه‌ها به عنوان ضرایب استفاده می‌کند. پایه‌های محاسباتی $|0\rangle$، ...، $|N-1\rangle$ را در نظر بگیرید که در آن $|j\rangle$ یک بردار به طول N است که فقط درایه j-ام یک است و مابقی صفر هستند. تبدیل فوریه کوانتومی پایه $|j\rangle$ را به صورت زیر تغییر می‌دهد:

$$\text{QFT}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{jk} |k\rangle. \tag{۶}$$

حال فرض کنید که در یک حالت کلی ضریب پایه $|j\rangle$ برابر x_j باشد. در این شرایط تبدیل فوریه به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\text{QFT} \sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} y_k |k\rangle, \tag{۷}$$

که در آن y_k به صورت زیر تعریف می‌شود که البته همان تبدیل فوریه گسسته است:

$$y_k \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega^{jk}. \tag{۸}$$

به یک نکته توجه کنید که به توان رساندن ω یک عملیات «پیمانه‌ای» است. به این معنی که بعد از رسیدن به یک «نقطه» همه چیز به حالت اولیه برمی‌گردد. توجه کنید که ω یک نقطه بر روی یک دایره است و بنابراین اگر به اندازه 2π به دور مرکز گردش کند به جای اول برمی‌گردد. توجه کنید که $\omega^N = \omega^0 = 1$ و $\omega^{N+1} = \omega^N\omega^1 = \omega$ و الی آخر. پس می‌توان توان ω را به پیمانه N حساب کرد.

مثال: یک سیستم دو کیوبیتی را در نظر بگیرید. حالت این سیستم به وسیله یک بردار به طول چهار قابل نمایش است که پیش‌تر با آن آشنا شده‌اید:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad |01\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad |10\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad |11\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{۹}$$

برای محاسبه تبدیل فوریه کوانتومی $|00\rangle$ (که با $|\widetilde{00}\rangle$ نشان داده می‌شود) به صورت زیر عمل می‌شود:

$$|\widetilde{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}y_0 = \sum_{j=0}^{3}\omega^{j\times 0}x_j = 1+0+0+0 = 1\\ y_1 = \sum_{j=0}^{3}\omega^{j\times 1}x_j = \omega^0+0+0+0 = 1\\ y_2 = \sum_{j=0}^{3}\omega^{j\times 2}x_j = \omega^0+0+0+0 = 1\\ y_3 = \sum_{j=0}^{3}\omega^{j\times 3}x_j = \omega^0+0+0+0 = 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

به طور مشابه برای $|\widetilde{01}\rangle$ به صورت زیر عمل می‌شود:

$$|\widetilde{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}y_0 = \sum_{j=0}^{3}\omega^{j\times 0}x_j = 0+1+0+0 = 1\\ y_1 = \sum_{j=0}^{3}\omega^{j\times 1}x_j = 0+\omega^1+0+0 = \omega^1\\ y_2 = \sum_{j=0}^{3}\omega^{j\times 2}x_j = 0+\omega^2+0+0 = \omega^2\\ y_3 = \sum_{j=0}^{3}\omega^{j\times 3}x_j = 0+\omega^3+0+0 = \omega^3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

بررسی کنید که مقادیر زیر نیز به درستی مشخص شده باشند:

$$|\widetilde{01}\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \omega^2\\ \omega^4\\ \omega^6\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \omega^2\\ 1\\ \omega^2\end{bmatrix}, \qquad |\widetilde{11}\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \omega^3\\ \omega^6\\ \omega^9\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \omega^3\\ \omega^2\\ \omega^1\end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

به ترتیب زیر هم می‌توانیم دو کیوبیت را پس از اعمال تبدیل فوریه از یکدیگر جدا کنیم که متوجه شویم برای هر

کیوبیت چه اتفاقی رخ می‌دهد.

$$|\widetilde{00}\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = (\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}) \otimes (\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}) \tag{۱۳}$$

$$|\widetilde{01}\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\\omega^1\\\omega^2\\\omega^3\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\omega^2\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\omega^1\end{bmatrix} = (\frac{|0\rangle + \omega^2|1\rangle}{\sqrt{2}}) \otimes (\frac{|0\rangle + \omega^1|1\rangle}{\sqrt{2}}) \tag{۱۴}$$

$$|\widetilde{10}\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\\omega^2\\\omega^4\\\omega^6\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\omega^4\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\omega^2\end{bmatrix} = (\frac{|0\rangle + \omega^4|1\rangle}{\sqrt{2}}) \otimes (\frac{|0\rangle + \omega^2|1\rangle}{\sqrt{2}}) \tag{۱۵}$$

$$|\widetilde{11}\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\\omega^3\\\omega^6\\\omega^9\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\omega^6\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\omega^3\end{bmatrix} = (\frac{|0\rangle + \omega^6|1\rangle}{\sqrt{2}}) \otimes (\frac{|0\rangle + \omega^3|1\rangle}{\sqrt{2}}) \tag{۱۶}$$

□

۲.۲ مدار QFT

برای اینکه مدار تبدیل فوریه کوانتومی باید در حالت کلی متوجه شویم که برای هر کیوبیت چه اتفاقی میفتد. به این منظور ابتدا به خاطر بیاورید که $2^n = N$ که n تعداد کیوبیت‌ها و N اندازه حالت سیستم است. بنابراین:

$$\text{QFT}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{jk}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{2^n-1}e^{2ijk\pi/2^n}|k\rangle \tag{۱۷}$$

حال نمایش باینری عدد $|k\rangle$ را به صورت «$|k_1 \dots k_n\rangle$» در نظر بگیرید (مثلاً نمایش باینری $|2\rangle$ و $|3\rangle$ به ترتیب برابر $|10\rangle$ و $|11\rangle$ است). سپس دقت کنید که چون $0 \leq k \leq 2^n - 1$ است پس $\frac{k}{2^n}$ یک عدد کوچکتر از «یک» است. این عدد اعشاری را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\frac{k}{2^n} = \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell 2^{-\ell} = 0.k_1 \dots k_n. \tag{۱۸}$$

اگر این مقدار را در عبارت (۱۷) قرار دهیم داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{QFT}|j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k_1 \in \{0,1\}} \cdots \sum_{k_n \in \{0,1\}} e^{2ij\pi \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell 2^{-\ell}} |k_1 \dots k_n\rangle && (۱۹)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k_1 \in \{0,1\}} \cdots \sum_{k_n \in \{0,1\}} \bigotimes_{\ell}^{n} e^{2ijk_\ell \pi 2^{-\ell}} |k_\ell\rangle && (۲۰)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \bigotimes_{\ell}^{n} \Big[\sum_{k_\ell \in \{0,1\}} e^{2ijk_\ell \pi 2^{-\ell}} |k_\ell\rangle \Big] && (۲۱)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \bigotimes_{\ell}^{n} \Big[|0\rangle + e^{2i\pi j 2^{-\ell}} |1\rangle \Big] && (۲۲)
\end{aligned}$$

معادله (۲۲) یک تعبیر مشخص دارد. اگر بخواهیم تبدیل فوریه کوانتومی پایه j-ام محاسباتی را بسازیم کافی است n کیوبیت خروجی را در حالت برهم‌نهاده $|+\rangle$ قرار دهیم. سپس کیوبیت اول (مکان کم ارزش) را به اندازه $\frac{j}{N}(2\pi)$ حور محور z دوران می‌دهیم. کیوبیت دوم را به اندازه $\frac{2j}{N}(2\pi)$ و کیوبیت سوم را به اندازه $\frac{4j}{N}(2\pi)$ و همین طور الی آخر دوران می‌دهیم. برای اینکه عبارت (۲۲) را ساده‌تر کنیم ابتدا محاسبات زیر را ببینید:

$$\ell = n \rightarrow e^{2i\pi j 2^{-n}} = e^{2i\pi 0.j_1 \dots j_n} \tag{۲۳}$$

$$\ell = n-1 \rightarrow e^{2i\pi (j_1 \dots j_n) 2^{-(n-1)}} = e^{2i\pi j_1 . j_2 \dots j_n} = e^{2i\pi j_1} e^{2i\pi 0.j_2 \dots j_n} = e^{2i\pi 0.j_2 \dots j_n} \tag{۲۴}$$

$$\vdots \tag{۲۵}$$

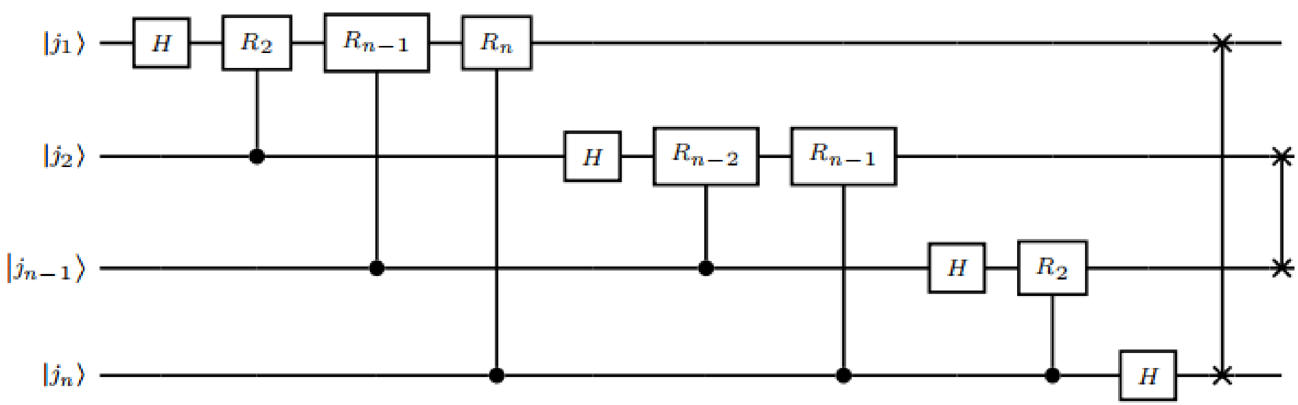
$$\ell = 2 \rightarrow e^{2i\pi (j_1 \dots j_n) 2^{-2}} = e^{2i\pi j_1 j_2 \dots j_{n-2} . j_{n-1} j_n} = e^{2i\pi j_1 j_2 \dots j_{n-2}} e^{2i\pi 0.j_{n-1} j_n} = e^{2i\pi 0.j_{n-1} j_n} \tag{۲۶}$$

$$\ell = 1 \rightarrow e^{2i\pi (j_1 \dots j_n) 2^{-1}} = e^{2i\pi j_1 j_2 \dots j_{n-1} . j_n} = e^{2i\pi j_1 j_2 \dots j_{n-1}} e^{2i\pi 0.j_n} = e^{2i\pi 0.j_n} \tag{۲۷}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\mathrm{QFT}|j\rangle = \frac{(|0\rangle + e^{2i\pi 0.j_n}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi 0.j_{n-1} j_n}|1\rangle) \otimes \cdots \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi 0.j_1 \dots j_n}|1\rangle)}{\sqrt{N}} \tag{۲۸}$$

عبارت اخیر به ما اجازه می‌دهد که یک مدار برای عملیات تبدیل فوریه کوانتومی بسیازیم. با توجه به کیوبیت اول متوجه می‌شویم که فقط به کیوبیت n-ام ورودی مرتبط است. کیوبیت بعدی فقط به دو کیوبیت n و $n-1$ بستگی



شکل ۲: مدار تبدیل فوریه کوانتومی

دارد و الی آخر. دقت کنید کیوبیت اول به حالت برهم‌نهاده رفته است ($|0\rangle + |1\rangle$) و سپس یک مقدار فاز دریافت کرده است. به منظور اضافه کردن این فاز دریچه زیر را معرفی می‌کنیم:

$$R_k \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\pi/2^k} \end{bmatrix}. \quad (۲۹)$$

حال ادعا می‌کنیم که مدار شکل ۲ تبدیل فوریه کوانتومی را انجام می‌دهد. فراموش نکنید که $|j\rangle = |j_1 \dots j_n\rangle$ و بنابراین j_1 کیوبیتی است که در جایگاه پرارزش نمایش بیتی قرار دارد. حاصل اعمال دریچه هادامارد بر روی کیوبیت j_1 را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi 0.j_1}|1\rangle)|j_2 \dots j_n\rangle, \quad (۳۰)$$

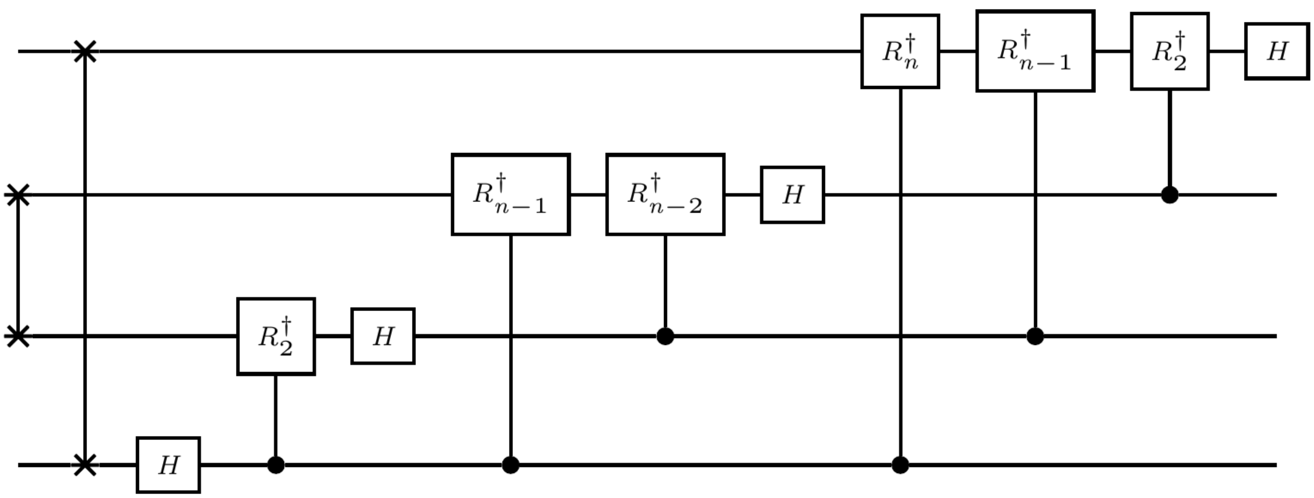
که اگر $j_1 = 0$ باشد آنگاه $e^{2i\pi 0.j_1} = 1$ و اگر $j_1 = 1$ باشد آنگاه $e^{2i\pi 0.j_1} = -1$ می‌شود که همان رفتار دریچه هادامارد است. حال اگر دریچه R_2 را به صورت کنترل‌شده (کنترل با کیوبیت j_2) به کیوبیت j_1 اعمال کنیم به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi 0.j_1 j_2}|1\rangle)|j_2 \dots j_n\rangle. \quad (۳۱)$$

قابل مشاهده است که با تکرار این عملیات به ازای بقیه کیوبیت‌ها به عنوان کیوبیت کنترل‌کننده می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi 0.j_1 \dots j_n}|1\rangle)|j_2 \dots j_n\rangle. \quad (۳۲)$$

با تکرار این عملیات بر روی سایر کیوبیت‌ها می‌توان مشاهده کرد که چگونه می‌توان تبدیل فوریه کوانتومی را پیاده‌سازی کرد. توجه داشته باشید که در انتها باید یکسری عملیات SWAP را نیز انجام دهیم تا به معادله (۲۸) برسیم.



شکل ۳: مدار تبدیل معکوس فوریه کوانتومی

۳.۲ مدار $\mathbf{QFT}^\dagger$

برای محاسبه تبدیل معکوس فوریه کوانتومی کافی است که ابتدا دریچه‌ها را با معکوس خودشان جایگزین می‌کنیم و سپس آنها را به ترتیب برعکس اعمال می‌کنیم. از قبل می‌دانیم که دریچه هادامارد معکوس خودش است. معکوس دریچه R_k به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$R_k^\dagger \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi/2^k} \end{bmatrix}. \tag{۳۳}$$

نمای نهایی تبدیل معکوس فوریه کوانتومی در شکل ۳ آمده است.

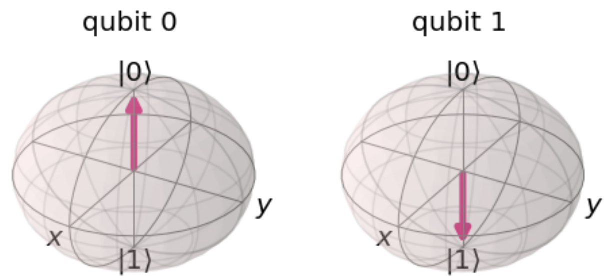
۴.۲ شبیه‌سازی

در این قسمت مدار تبدیل فوریه کوانتومی را شبیه‌سازی می‌کنیم. ابتدا کتابخانه‌های لازم را وارد می‌کنیم:

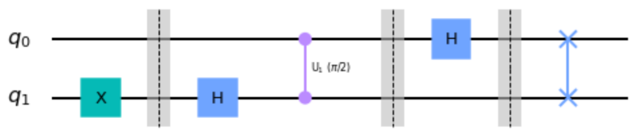
```
import numpy as np
from numpy import pi
from qiskit import QuantumCircuit, execute, Aer
from qiskit.visualization import plot_bloch_multivector
```

سپس یک تابع تعریف می‌کنیم که یک مدار کوانتومی را دریافت می‌کند (به همراه تعداد کیوبیت‌های آن) و به آن مدار تبدیل فوریه کوانتومی را اضافه می‌کند.

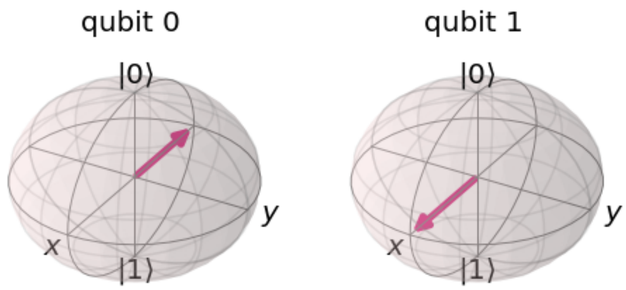
```
def add_qft(qc, n):
```



(آ) وضعیت سیستم در حالت $|10\rangle$



(ب) اعمال تبدیل فوریه به $|10\rangle$



(ج) نتیجه تبدیل فوریه $|10\rangle$

شکل ۴: بررسی تبدیل فوریه کوانتومی

```
indices = list(range(n))
indices = indices[::-1]
for i in indices:
    qc.h(i)
    for j in range(i):
        qc.cu1(pi/2**(i-j), j, i)
    qc.barrier()
for i in range(n//2):
    qc.swap(i, n-i-1)
return qc
```

در این تابع ابتدا یک لیست از اعداد n تا 1 به صورت نزولی ساخته می‌شود، چرا که باید کیوبیت‌ها را از سمت پرارزش به سمت کم‌ارزش پردازش کنیم تا خروجی مشابه شکل ۲ شود. به ازای هر کیوبیت ابتدا یک دریچه هادامارد اضافه می‌شود. سپس به تمام کیوبیت‌های قبلی از طریق دریچه U_1 کنترل‌شده متصل می‌شود که معادل همان دریچه R_k است که در معادله (۲۹) معرفی شد. در انتها نیز کیوبیت‌ها به صورت مناسب SWAP می‌شوند. حال برای یک سیستم دو کیوبیتی یک مثال را اجرا می‌کنیم. فرض کنید که سیستم در حالت $|10\rangle$ باشد. یعنی به کیوبیت دوم دریچه X اعمال شده است. در نتیجه شبیه‌سازی حالت سیستم در شکل آ۴ نشان داده شده است:

```
n = 2
```

```
qc = QuantumCircuit(n)
qc.x(1)
qc.barrier()
backend = Aer.get_backend("statevector_simulator")
statevector = execute(qc, backend=backend).result().get_statevector()
plot_bloch_multivector(statevector)
```

حال به مدار فوق تبدیل فوریه را اعمال می‌کنیم و آن را رسم می‌کنیم که حاصل آن در شکل ۴ب آمده است.

```
qc = add_qft(qc, n)
qc.draw("mpl")
```

در نهایت سیستم را به صورت زیر شبیه‌سازی می‌کنیم:

```
backend = Aer.get_backend("statevector_simulator")
statevector = execute(qc, backend=backend).result().get_statevector()
plot_bloch_multivector(statevector)
```

که حاصل آن در شکل ۴ج آمده است. پیشتر دیدیم که حاصل تبدیل فوریه کوانتومی $|10\rangle$ به صورت زیر است:

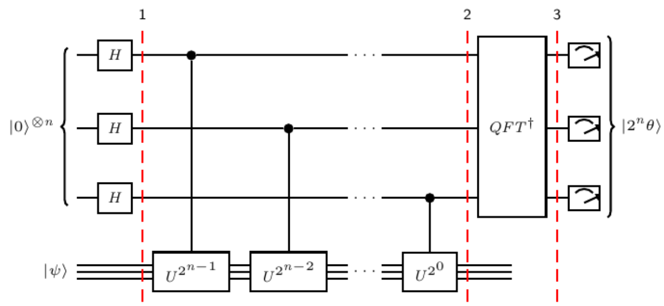
$$|\widetilde{10}\rangle = (\frac{|0\rangle + \omega^4|1\rangle}{\sqrt{2}}) \otimes (\frac{|0\rangle + \omega^2|1\rangle}{\sqrt{2}}), \tag{۳۴}$$

که در آن $\omega = e^{2i\pi/4}$ است. یعنی کیوبیت جایگاه کم ارزش (q_0) در حالت $\frac{|0\rangle+\omega^2|1\rangle}{\sqrt{2}}$ که به معنی این است که این کیوبیت ابتدا در حالت برهم‌نهاده $|+\rangle$ قرار گرفته است و سپس به اندازه $2 \times 2\pi/4 = \pi$ حول محور z دوران یافته است. همچنین کیوبیت جایگاه پرارزش (q_1) در حالت برهم‌نهاده است. دقت کنید که طبق حساب پیمانه‌ای $\omega^4 = 1$ است. طبق تعبیری که از معادله (۲۲) بدست آوردیم هم چون در حالت تبدیل پایه محاسباتی دوم هستیم ($|2\rangle$) کافی است که کیوبیت اول را به اندازه $\frac{2}{4}(2\pi)$ و کیوبیت دوم را به اندازه $\frac{4}{4}(2\pi)$ دوران می‌دهیم که همان نتیجه حاصل می‌شود.

۳ تخمین فاز

در ادامه به تکنیک «تخمین فاز» می‌پردازیم. این تکنیک یکی از ابزارهای پرکاربرد محاسبات کوانتومی است. به صورت کلی مسئله تخمین فاز را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد: فرض کنید عملگر یکانی U به ما داده شده است هدف ما تخمین زدن مقدار θ در معادله زیر است:

$$U|\psi\rangle = e^{2i\pi\theta}|\psi\rangle. \tag{۳۵}$$



شکل ۵: مدار تخمین فاز

توجه کنید که در این معادله $|\psi\rangle$ یک بردار ویژه برای ماتریس U است و $e^{2i\pi\theta}$ مقدار ویژه متناظر آن است. چون U یکانی است طبیعتاً مقدار ویژه‌های آن نیز دارای اندازه یک هستند. ایده کلی به این شرح است: مدار تخمین فاز از دو بخش مهم تشکیل شده است. ابتدا با استفاده از تکنیک Phase Kickback فاز عملگر را استخراج می‌کنیم. دقت کنید که فاز به صورت مستقیم قابل اندازه‌گیری نیست. بنابراین سعی می‌کنیم که اطلاعات فاز را به صورت یک عدد مبنای دو در تعداد مناسبی کیوبیت ذخیره کنیم. این اطلاعات ذخیره‌شده به صورت تعدادی دوران حول محور z در هر کیوبیت انباشته می‌شود. سپس ما از تبدیل معکوس فوریه کوانتومی استفاده می‌کنیم تا اطلاعات این دوران‌ها را به پایه محاسباتی منتقل کنیم و سپس آن را اندازه‌گیری کنیم.

۱.۳ مدار تخمین فاز

مدار تخمین فاز کوانتومی در شکل ۵ آمده است. می‌بینید که در سمت ورودی دو رجیستر (مجموعه کیوبیت) داریم. یکی از آنها با مقدار $|0\rangle^{\otimes n}$ مقدار دهی شده است که در ادامه به حالت برهم‌نهاده منتقل می‌شود. دیگری بردار ویژه $|\psi\rangle$ را در خود نگه‌داری می‌کند. پس سیستم در حالت زیر قرار دارد.

$$\frac{1}{\sqrt{N}}(|0\rangle + |1\rangle)^{\otimes n}|\psi\rangle \tag{۳۶}$$

سپس ما به ازای هر کیوبیت در رجیستر اول مدار را به صورت کنترل‌شده اعمال می‌کنیم. دقت کنید که چون بیت کنترل در حالت برهم‌نهاده قرار دارد انتظار داریم که پدیده Phase Kickback رخ بدهد و اطلاعات فاز به کیوبیت کنترل منتقل شود. به صورت خاص، دریچه متناظر با کیوبیت اول را به صورت $U^{2^{n-1}}$ اعمال می‌کنیم. یعنی این دریچه 2^{n-1} بار تکرار می‌شود. به صورت کلی دریچه متناظر با کیوبیت j-ام را 2^{j-1} بار به صورت کنترل‌شده اعمال می‌کنیم. حال دقت کنید که اگر این دریچه 2^j بار اعمال شود فاز مد نظر به صورت زیر اعمال خواهد شد:

$$U^{2^j}|\psi\rangle = U^{2^j-1}U|\psi\rangle = U^{2^j-1}e^{2i\pi\theta}|\psi\rangle = \cdots = e^{2i\pi 2^j\theta}|\psi\rangle. \tag{۳۷}$$

بنابراین در انتهای این عملیات حالت سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}(|0\rangle + e^{2i\pi 2^{n-1}\theta}|1\rangle) \otimes \cdots \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi 2^{0}\theta}|1\rangle) \otimes |\psi\rangle. \tag{۳۸}$$

دقت کنید که رجیستر اول دقیقاً مشابه حالتی است که پس از انتقال یک پایه محاسباتی به پایه فوریه به‌دست آوردیم (معادله (۲۲) را ببینید). بنابراین این معادله با عبارت زیر نیز معادل است:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2ik\pi\theta}|k\rangle \otimes |\psi\rangle. \tag{۳۹}$$

در واقع کافی است در آن عبارات به جای j عبارت $2^n\theta$ را قرار دهیم تا این عبارات جدید ظاهر شوند. بنابراین بر روی رجیستر اول یک تبدیل معکوس فوریه کوانتومی را اعمال می‌کنیم تا مقدار $2^n\theta$ را بتوانیم اندازه‌گیری کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{-2ijk\pi/N}e^{2ik\pi\theta}|j\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{-2ik\pi/N(j-N\theta)}|j\rangle \otimes |\psi\rangle. \tag{۴۰}$$

در این عبارت می‌بینیم که احتمال مشاهده $N\theta$ بالاست و در حالتی که این مقدار یک عدد صحیح باشد خروجی یک پایه محاسباتی خواهد بود. اگر این عبارت عدد صحیح نباشد آنگاه احتمال مشاهده عدد نزدیک به این مقدار از بقیه بیشتر و در حدود چهل درصد است.

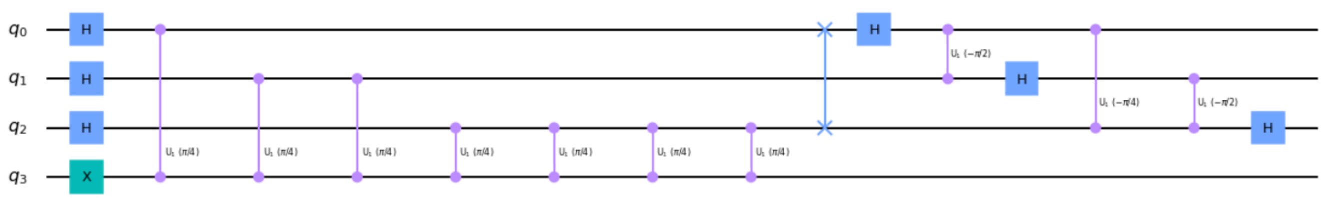
۲.۳ شبیه‌سازی

فرض کنید که دریچه T به ما داده شده است. به ترتیب زیر می‌توان یک بردار ویژه و مقدار ویژه متناظر را مشاهده کرد:

$$T|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = e^{i\pi/4}|1\rangle. \tag{۴۱}$$

اگر این عبارت را به فرم $e^{2i\pi\theta}$ مرتب کنیم می‌بینیم که $\theta = 1/8$ است. برای تخمین فاز از سه کیوبیت برای تخمین استفاده می‌کنیم. بردار ویژه نیز در قالب یک کیوبیت نشان داده می‌شود ($|\psi\rangle = |1\rangle$). ابتدا تابع تبدیل معکوس فوریه را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

```
def add_qft_inv(qc, n, use_barrier=True):
    for i in range(n//2):
        qc.swap(i, n-i-1)
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            qc.cu1(-pi/2**(i-j), j, i)
        qc.h(i)
    return qc
```



شکل ۶: مدار تخمین فاز برای دریچه T

می‌بینیم که دقیقاً به ترتیب برعکس دریچه‌ها مورداستفاده قرار گرفته‌اند و در مقدار دوران هم یک ضریب منفی لحاظ شده است. سپس یک تابع تعریف می‌کنیم که بخش ابتدایی مدار تخمین فاز را برای دریچه T بسازد:

```
def add_phase_estimate(qc, n, use_barrier=True):
    for i in range(n):
        qc.h(i)
    for i in range(n):
        for j in range(2**i):
            qc.cu1(pi/4, i, n)
    return qc
```

در ابتدا دریچه‌های هادامارد اضافه شده‌اند و سپس هر کیوبیت i-ام به عنوان کیوبیت کنترلی برای 2^{i-1} دریچه مورد استفاده قرار گرفته است (دقت کنید که اندیس‌های پایتون از صفر شروع می‌شوند و به همین دلیل منهای یک در کد استفاده نشده است). با استفاده از کد زیر می‌توان مدار تخمین فاز را به صورت کامل برای دریچه T ساخت. مدار نهایی (بخش اندازه‌گیری برای حفظ خوانایی و اندازه شکل حذف شده است) در شکل ۶ آمده است.

```
n = 3
qc = QuantumCircuit(n+1, n)
qc.x(n)
qc = add_phase_estimate(qc, n)
qc = add_qft_inv(qc, n)
for i in range(n):
    qc.measure(i,i)
```

این مدار را به صورت زیر می‌توان شبیه‌سازی کرد:

```
backend = Aer.get_backend('qasm_simulator')
shots = 1000
results = execute(qc, backend=backend, shots=shots).result()
answer = results.get_counts()
plot_histogram(answer)
```

با اجرای این شبیه‌سازی ملاحظه خواهیم کرد که با احتمال صددرصد خروجی 001 مشاهده می‌شود. دلیل این امر این است که $N\theta = 2^3 \times 1/8 = 1$ یک عدد صحیح است. دقت کنید که چون از سه کیوبیت برای کدگذاری فاز و انجام تبدیل معکوس فوریه استفاده کردیم مقدار $N = 2^n = 2^3 = 8$ شده است. بنابراین در نهایت با یک محاسبه ساده شخص مشاهده‌کننده می‌تواند مقدار θ را به صورت $\theta = \frac{1}{N} = \frac{1}{8}$ تشخیص دهد.