ارائه ۷	پردازش اطلاعات کوانتومی پاییز ۱۴۰۱	قسمت ۲

۱ مقدمه

در این ارائه دریچه [1] CNOT را به صورت عمیق‌تر بررسی می‌کنیم. سپس به مفهوم Phase Kickback می‌پردازیم.

۲ بررسی دریچه CNOT

به خاطر بیاورید که دریچه CNOT دو ورودی دارد. یکی از آنها کیوبیت کنترل و دیگری کیوبیت هدف نامگذاری می‌شود. اگر کیوبیت کنترل $|1\rangle$ باشد، کیوبیت هدف NOT می‌شود. در غیر اینصورت کیوبیت هدف عوض نمی‌شود. به نمایش ماتریسی و عملیات‌های زیر توجه کنید:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{۱}$$

$$|10\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{۲}$$

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{۳}$$

[1] Gate

$$\mathrm{CNOT}|00\rangle = |00\rangle \tag{۴}$$

$$\mathrm{CNOT}|01\rangle = |01\rangle \tag{۵}$$

$$\mathrm{CNOT}|10\rangle = |11\rangle \tag{۶}$$

$$\mathrm{CNOT}|11\rangle = |10\rangle \tag{۷}$$

یکی از کاربردهای این دریچه این است که که اگر کیوبیت «کنترل» را در حالت $|+\rangle$ و کیوبیت «هدف» را در حالت $|0\rangle$ قرار دهیم، می‌توانیم دو کیوبیت درهم‌تنیده ایجاد کنیم:

$$\mathrm{CNOT}|+0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \tag{۸}$$

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که اگر کیوبیت «هدف» را نیز در حالت برهم‌نهاده [۲] (یکی از حالت‌های $|+\rangle$ یا $|-\rangle$) قرار دهیم چه اتفاقی میفتد؟ به این منظور، شبیه‌ساز Qiskit را به صورت زیر آماده کنید:

```
from qiskit import QuantumCircuit, Aer, execute
from math import pi
import numpy as np
from qiskit.visualization import plot_bloch_multivector, plot_histogram
```

ابتدا بررسی می‌کنیم که چگونه می‌توان حالت‌های $|++\rangle$ و $|-+\rangle$ را ایجاد کنیم و آنها را به صورت دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

۱.۲ حالت $|++\rangle$

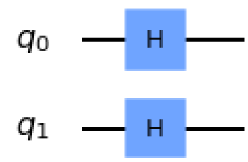
حالت $|++\rangle$ را می‌توان به شکل زیر در شبیه‌ساز ایجاد کرد:

```
qc = QuantumCircuit(2)
qc.h(0)
qc.h(1)
```

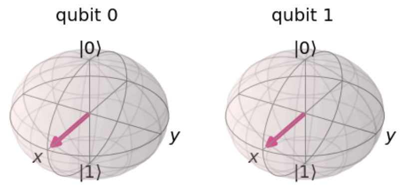
که حاصل آن در شکل ۱آ قابل مشاهده است. سپس می‌توانیم آن را به روش زیر شبیه‌سازی کنیم تا حالت آن را ملاحظه کنیم:

```
statevector_backend = Aer.get_backend('statevector_simulator')
final_state = execute(qc,statevector_backend).result().get_statevector()
print(final_state)
plot_bloch_multivector(final_state)
```

[2] Superposition

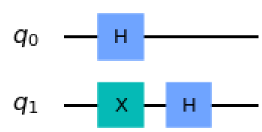


(آ) قرار دادن ورودی در حالت $|++\rangle$

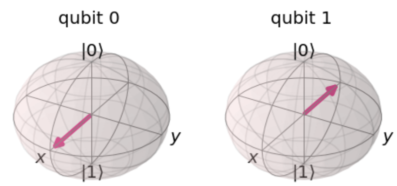


(ب) نمایش حالت $|++\rangle$ بر روی کره بلاک

شکل ۱: بررسی حالت $|++\rangle$



(آ) قرار دادن ورودی در حالت $|-+\rangle$



(ب) نمایش حالت $|+-\rangle$ بر روی کره بلاک

شکل ۲: بررسی حالت $|+-\rangle$

در نتیجه این شبیه‌سازی خواهیم دید که حالت دو کیوبیت به شکل زیر است:

$$\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \tag{۹}$$

و البته می‌توان دو کیوبیت را به صورت شماتیک با استفاده از کره بلاک [3] نمایش داد که حاصل در شکل ۱ب قابل مشاهده است.

۲.۲ حالت $|+-\rangle$

مشابه حالت قبلی، برای حالت $|+-\rangle$ می‌توانیم به صورت زیر کیوبیت‌ها را آماده کنیم:

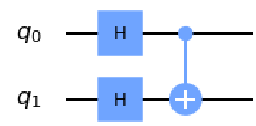
```
qc = QuantumCircuit(2)
qc.h(0)
qc.x(1)
qc.h(1)
```

که مدار مشابه شکل ۲آ می‌سازد. شبیه‌سازی از طریق کدهای حالت قبلی قابل انجام است. در نتیجه به حالت زیر می‌رسیم:

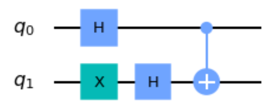
$$|+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \tag{۱۰}$$

که نمایش آن بر روی کره بلاک در شکل ۲ب قابل ملاحظه است.

[3] Bloch Sphere

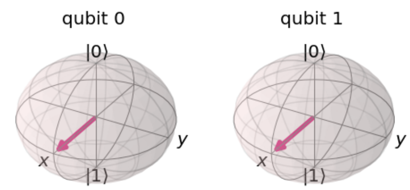


(آ) اعمال CNOT بر $|++\rangle$

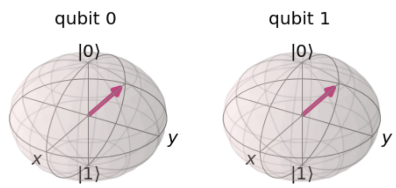


(ب) اعمال CNOT بر $|+-\rangle$

شکل ۳: اعمال دریچه CNOT



(آ) نتیجه اعمال CNOT بر $|++\rangle$



(ب) نتیجه اعمال CNOT بر $|+-\rangle$

شکل ۴: نتیجه اعمال دریچه CNOT

۳.۲ اعمال CNOT

حال دریچه CNOT را بر روی دو حالتی که با آنها آشنا شدیم ($|++\rangle$ و $|+-\rangle$) اعمال می‌کنیم. به عنوان نمونه، قطعه کد زیر این کار را بر روی $|+-\rangle$ اعمال می‌کند:

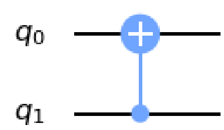
```
qc = QuantumCircuit(2)
qc.h(0)
qc.x(1)
qc.h(1)
qc.cx(0,1)
```

حاصل دو مدار مطلوب در شکل ۳ آمده است. حاصل شبیه‌سازی حالات خروجی به ترتیب برای ورودی‌های $|++\rangle$ و $|+-\rangle$ به شرح زیر است:

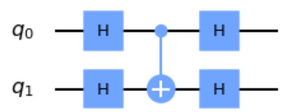
$$\mathrm{CNOT}|++\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = |++\rangle \quad (۱۱)$$

$$\mathrm{CNOT}|+-\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) = |--\rangle \quad (۱۲)$$

که نمایش شماتیک بر روی کره بلاک در شکل ۴ آمده است. نکته جالب اینجاست که تحت ورودی‌های فوق، دریچه CNOT حالت کیوبیت هدف را تغییر نمی‌دهد، اما حالت کیوبیت کنترل را تغییر می‌دهد. این در تضاد با حالتی است که ورودی‌ها به صورت برهم‌نهاده نیستند و «وضعیت» کیوبیت کنترل، «حالت» کیوبیت هدف را تغییر می‌دهد. اگر به وضعیت کیوبیت‌ها قبل از اینکه به حالت برهم‌نهاده بروند و در انتها پس از اینکه در پایه هادامارد اندازه‌گیری شوند



(آ) دریچه CNOT که در آن کیوبت دوم کنترل است



(ب) احاطه دریچه CNOT با دریچه H

شکل ۵: دو مدار معادل

نگاهی بیندازیم به حالت زیر می‌رسیم:

$$|00\rangle \rightarrow \mathrm{CNOT}|++\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = |++\rangle \rightarrow |00\rangle \quad (۱۳)$$

$$|01\rangle \rightarrow \mathrm{CNOT}|+-\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) = |--\rangle \rightarrow |11\rangle \quad (۱۴)$$

با اندکی بررسی می‌توان متوجه شد که این رفتار دقیقاً برعکس رفتار دریچه CNOT است. یعنی، اگر بیت «دوم» صفر باشد، بیت «اول» تغییر نمی‌کند. اما، اگر بیت «دوم» یک باشد، بیت «دوم» تغییر حالت می‌دهد. بنابراین، متوانیم ادعا کنیم که دو مداری که در شکل ۵ آمده‌اند معادل هستند. همچنین، از طریق شبیه‌سازی به روش زیر می‌توان ماتریس یکانی متناظر با هر کدام از مدارات فوق را محاسبه کرد و بررسی کرد که آنها برابر هستند:

```
unitary_backend = Aer.get_backend('unitary_simulator')
unitary = execute(qc,unitary_backend).result().get_unitary()
print(unitary)
```

تساوی بدست آمده یکی از مثال‌های مفهوم Phase Kickback است که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم. توجه کنید که این تساوی از دیدگاه سخت‌افزاری نیز حائز اهمیت است. چرا که در برخی پیاده‌سازی‌های سخت‌افزاری تنها اعمال دریچه CNOT در یک راستا وجود دارد، اما با استفاده از نتیجه این تساوی می‌توان این دریچه را به صورت دو طرفه اعمال کرد.

۳ Phase Kickback

Phase Kickback یکی از مفاهیم بسیار مهم است که در بسیاری از الگوریتم‌های کوانتومی کاربرد دارد. Phase Kickback زمانی اتفاق میفتد که در یک عملیات کنترل‌شده (مثل CNOT) به ازای مقادیر مشخصی از کیوبیت هدف یک تغییر فاز بر روی «کیوبیت کنترل» اتفاق میفتد (فاز از سمت کیوبیت هدف به سمت کیوبیت کنترل kicked back می‌شود). در مثال CNOT وقتی که کیوبیت کنترل در یکی از حالت‌های $|0\rangle$ و یا $|1\rangle$ باشد، این فاز اضافی

حالت کل سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. گرچه این فاز از نوع سراسری است و قابل مشاهده نیست:

$$\begin{aligned} \mathrm{CNOT}|0-\rangle &= |0\rangle \otimes |-\rangle && (۱۵)\\ &= |0-\rangle && (۱۶)\\ \mathrm{CNOT}|1-\rangle &= |1\rangle \otimes X|-\rangle && (۱۷)\\ &= -|1\rangle \otimes |-\rangle && (۱۸)\\ &= -|1-\rangle && (۱۹) \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که اگر دریچه X را بر روی کیوبیت $|-\rangle$ اعمال کنیم، فاز -1 را به آن اضافه می‌کند:

$$X|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle) = -|-\rangle \tag{۲۰}$$

$$X|-\rangle = -|-\rangle \tag{۲۱}$$

پدیده جالب زمانی اتفاق میفتد که کیوبیت کنترل در حالت برهم‌نهاده باشد.

$$\begin{aligned} \mathrm{CNOT}|+-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{CNOT}|0-\rangle + \mathrm{CNOT}|1-\rangle) && (۲۲)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle + |1\rangle X|-\rangle) && (۲۳)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle - |1-\rangle) && (۲۴) \end{aligned}$$

در محاسبات فوق می‌بینیم که بخش $|1\rangle$ کیوبیت کنترل باعث می‌شود که یک تغییر فاز بر روی کیوبیت هدف اعمال می‌کند. حال اگر یک فاکتورگیری به صورت زیر انجام دهیم:

$$\begin{aligned} \mathrm{CNOT}|+-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |-\rangle && (۲۵)\\ &= |--\rangle && (۲۶) \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که تغییر فاز خودش را به صورت یک تغییر فاز محلی بر روی کیوبیت کنترل نشان می‌دهد. اصطلاحاً کیوبیت هدف «فاز» را به سمت کیوبیت کنترل kicked back کرد.

۱.۳ دریچه T

در این قسمت به یک عملیات کنترل‌شده دیگر با استفاده از دریچه T می‌پردازیم. به خاطر بیاورید که ماتریس این دریچه به شکل زیر است:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \tag{۲۷}$$

اگر این دریچه را به کیوبیت $|1\rangle$ اعمال کنیم، یک فاز سراسری $e^{i\pi/4}$ به آن اضافه می‌شود:

$$T|1\rangle = e^{i\pi/4}|1\rangle \tag{۲۸}$$

حال می‌خواهیم این دریچه را به صورت کنترل‌شده بر روی این کیوبیت اعمال کنیم، به صورتی که کیوبیت کنترل در حالت $|+\rangle$ باشد. در این صورت خواهیم دید که تغییر فاز به صورت محلی صورت می‌گیرد:

$$|+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle \tag{۲۹}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) \tag{۳۰}$$

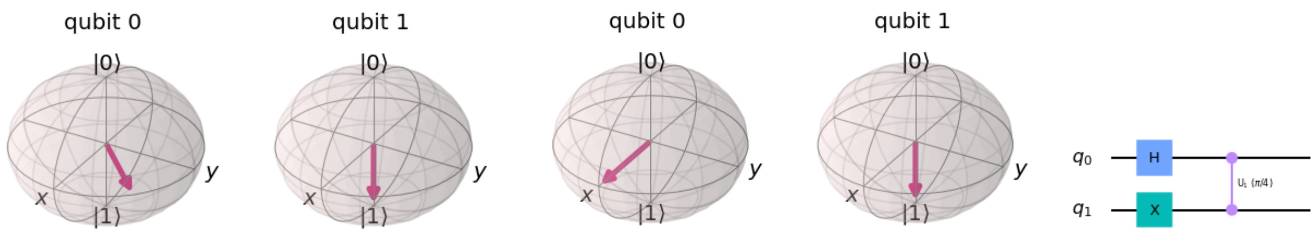
$$\text{Ctrl-T}|+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |1\rangle e^{i\pi/4}|1\rangle) \tag{۳۱}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\pi/4}|1\rangle) \otimes |1\rangle \tag{۳۲}$$

تأثیر این فازی که به سمت کیوبیت کنترل kicked back شده است این است که آن کیوبیت حول محور Z در کره بلاک به اندازه چهل و پنج درجه دوران می‌کند. اما توجه کنید که کیوبیت هدف بی‌تغییر باقی مانده است. حال این مسئله را در شبیه‌ساز بررسی می‌کنیم:

```
qc = QuantumCircuit(2)
qc.h(0)
qc.x(1)
qc.cu1(pi/4, 0, 1)
qc.draw("mpl")
```

که این مدار در شکل ۱۶ نشان داده شده است. توجه کنید که شبیه‌ساز دریچه کنترل‌شده را به صورت متقارن ترسیم کرده است (دو دایره کوچک بر روی سیم‌ها که به هم متصل هستند و کیوبیت کنترل از هدف متمایز نشده است. شکل آن را با دریچه CNOT مقایسه کنید. دلیل این است که در تمام حالت‌ها به صورت قطعی نمی‌توان به یکی از کیوبیت‌ها کنترل و به دیگری هدف گفت، چرا که مانند مثال فوق کیوبیت هدف تغییر نمی‌کند و کیوبیت کنترل عوض می‌شود.)



(آ) اعمال کنترل‌شده T   (ب) حالت قبل از اعمال کنترل‌شده دریچه T   (ج) حالت بعد از اعمال کنترل‌شده دریچه T

شکل ۶: اعمال کنترل‌شده دریچه T

وضعیت کیوبیت‌ها پیش از اعمال کنترل‌شده دریچه T بر روی کره بلاک در شکل ۶ب آمده است. بااستفاده از قطعه کد زیر می‌توان مدار فوق را شبیه‌سازی کرد و جایگاه کیوبیت‌ها در کره بلاک را پس از اعمال کنترل‌شده دریچه T مشخص نمود که در شکل ۶ج آمده است.

```
statevector_backend = Aer.get_backend('statevector_simulator')
final_state = execute(qc,statevector_backend).result().get_statevector()
plot_bloch_multivector(final_state)
```